

# 保測写像におけるカオス軌道の相対拡散

石 崎 龍 二

**概要** 2次元の保測写像である標準写像と標準写像を結合した4次元のFroeschlé写像における相空間上のカオス軌道の相対拡散の統計的性質を数値的に調べた。

標準写像において、通常拡散が生じるパラメータ $K=3.86$ では、相空間上のカオス軌道の2点間の平均2乗変位は、1点拡散の平均2乗変位のほぼ2倍になった。一方、異常拡散が発生するパラメータ $K=6.9115$ では、相空間上の2つのカオス軌道間の平均2乗変位は、1点拡散の平均2乗変位の2倍とのズレが通常拡散に比べて大きくなる傾向が出た。

Froeschlé写像において、結合定数が $\mu=0.0$ 、 $K_1$ および $K_2$ が標準写像において加速モードが安定に存在するパラメータ ( $K_1=6.9115$ ,  $K_2=6.4717$ ) では、相空間上の各点の平均2乗変位の指数 $\zeta_1$ ,  $\zeta_2$ が異なり、相対拡散の平均2乗変位の指数 $\zeta$ は、その中間の値となった。結合定数 $\mu$ が正 ( $\mu=0.001$ )、 $K_1$ および $K_2$ が標準写像において加速モードが安定に存在するパラメータ ( $K_1=6.9115$ ,  $K_2=6.4717$ ) でも、各点の平均2乗変位の指数 $\zeta_1$ ,  $\zeta_2$ が異なり、相対拡散の平均2乗変位の指数 $\zeta$ は、その中間の値となった。また、結合定数 $\mu$ が正の場合の方が、 $\mu=0$ の時に比べて相対拡散、1点拡散の平均2乗変位の指数 $\zeta$ ,  $\zeta_1$ ,  $\zeta_2$ が大きくなった。

**キーワード**：保測写像、カオス、カオス拡散、相対拡散、異常拡散、乱流

## 1 はじめに

流体中の粒子が時間と共に広がる拡散は、コーヒーにミルクの1滴を滴下してミルクがひろがる時や煙が空気中にひろがる時など日常的によく見ることのできる現象である。リチャードソン (L. F. Richardson) は、大気中における気球や火山灰の拡散の観測結果から、乱流状態にある流体中の浮遊粒子の平均2乗変位が、時間 $t$ の3乗に比例するとする法則 (リチャー

ドソンの法則) を導いた (1926年)[1]。リチャードソンは、電子計算機が誕生する以前に、数値計算による天気予報を試みた研究者として知られている。

乱流状態にある流体中の浮遊粒子の平均2乗変位に対するリチャードソンの法則は、粒子の運動方程式を、速度場が白色雑音であると仮定して解くことで示すことができる。しかしながら、こうした乱流に浮遊する粒子の拡散の性質を力学系の立場から説明することは簡単ではな

い。

近年、低次元力学系においても非常に複雑なカオス運動が生み出されることがわかり、多くの研究がなされてきている[2, 3, 4, 5]。低次元力学系のカオス拡散の例として、ラグランジアンカオスが挙げられる[6]。例えば、ベナール対流における水平方向と垂直方向の2次元平面上での流体粒子の運動は、保測力学系（面積が保存される）と同等となり、対流ロールが時間的に振動するとき、各ロールのセル間の境界付近から広域的カオスが発生することが知られている。

こうした低次元力学系におけるカオス拡散では、ブラウン運動のような通常拡散（平均2乗変位が  $t$  に比例）や異常拡散 [平均2乗変位が  $t$  のべき乗（指数が1とは異なる）に比例]が生じる。低次元力学系におけるカオス拡散の解析的および数値的研究は、乱流と輸送現象の力学系の観点からの解明に有効な手がかりを与えるものと期待される。

本稿では、保測写像における相空間上での2点間の相対拡散を数値計算により調べた。流体中の拡散の実験では、2つの探索粒子の相対距離の2乗平均が時間と共にどのように増大するのかという相対拡散がよく調べられており、相対拡散は実験で測定できる重要な量である。

第2節では、代表的な保測写像である標準写像と標準写像を結合したFroeschlé写像について紹介する。第3節では、相空間内でのカオス軌道の拡散の性質について考察する。第4節では、標準写像とFroeschlé写像における相対拡散の数値計算結果を示す。第5節で今回の数値計算のまとめと課題について考察する。

## 2 保測写像

### 2.1 標準写像

標準写像は、Chirikovによって最初に導入された（1979年）[7]。

この写像の物理的なモデルは、Kicked Rotatorである。これは、摩擦のない回転子に周期  $T$  毎に周期外力 ( $K \sin \theta$ ) が加わる力学系である。 $\theta(t)$  を、回転子の角度とし、運動量を  $p \equiv \dot{\theta}$  とするとKicked Rotatorのハミルトニアン  $H$  は、次式で与えられる。

$$H = \frac{p^2}{2} - K \cos \theta \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT). \quad (1)$$

ここで、 $K$  は周期外力の大きさであり、 $n$  は整数である。相空間上の状態変数は、 $\vec{X}(t) = \{\theta(t), p(t)\}$  である。 $\vec{X}(t)$  の時間発展方程式は、(1)式のハミルトニアン  $H$  より次式となる。

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\partial H / \partial \theta \\ \partial H / \partial p \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -K \sin \theta \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT) \\ p \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2)$$

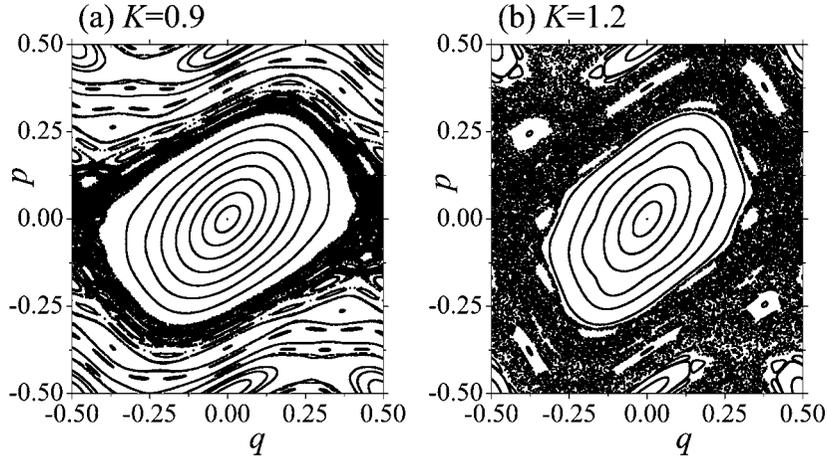
(2)式を  $t$  が  $nT - \epsilon < t < (n+1)T - \epsilon$  の間で積分する。2変数に関して、次のように、

$$(p(n), q(n)) \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0} [p(nT - \epsilon), \theta(nT - \epsilon)], \quad (3)$$

$\epsilon$  が0の極限を取る。ここで、 $p(n)$  や  $\theta(n)$  の  $n$  は、 $nT$  のことである。以降は、 $T$  を省略して表記する。このようにして、周期  $T$  毎の  $\vec{X}(t) = \{\theta(t), p(t)\}$  の時間発展を与える次の写像が得られる。

$$\begin{bmatrix} p(n+1) \\ \theta(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p(n) - K \sin \theta(n) \\ \theta(n) + p(n+1) \pmod{2\pi} \end{bmatrix}. \quad (4)$$

(4)式が、標準写像と呼ばれる写像である。ここで、 $q(n) = \theta(n)/2\pi$  で変数変換を行うと


 図1：標準写像における $K=0.9$ と $K=1.2$ での相空間

$$\begin{bmatrix} p(n+1) \\ q(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p(n) - \frac{K}{2\pi} \sin 2\pi q(n) \\ q(n) + p(n+1) \pmod{1} \end{bmatrix}, \quad (5)$$

となる。数値計算では(5)式を使うことにする。

標準写像は、宇宙線粒子のFermi加速の仕組みの解析、プラズマ高周波加熱、トカマク内に生成される $\alpha$ 粒子の閉じ込めの問題の研究などで、取り上げられるモデルである。

(5)式のヤコビ行列の行列式を求めると、

$$\det \begin{bmatrix} \partial p(n+1)/\partial p(n) & \partial p(n+1)/\partial q(n) \\ \partial q(n+1)/\partial p(n) & \partial q(n+1)/\partial q(n) \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$= \det \begin{bmatrix} 1 & -K \cos 2\pi q(n) \\ 1 & 1 - K \cos 2\pi q(n) \end{bmatrix} = 1,$$

となる。このことから、標準写像は、相空間内の任意の微小領域（2次元）をとったとき、写像の前後での微小領域の面積が等しい保測写像であることがわかる。

図1は、標準写像における相空間である。 $K$ が $K_c = 0.9716\dots$ を超えると、 $q = -0.5 \sim 0.5$ の不変曲線（KAMトーラス）が崩壊して、カオスの海の領域が相空間内の $p$ 方向に広がる[8]。従って、 $K > K_c$ ではカオス軌道の $p$ 方向への拡散が発生することになる。

## 2.2 Froeschlé写像

標準写像は2次元写像であるが、さらに次元を増やした写像でのカオス軌道の拡散を考えたい。標準写像を2つ結合したタイプの写像としてFroeschlé写像が知られている[9]。Froeschlé写像は、次式で与えられる4次元写像である。

$$\begin{bmatrix} p_1(n+1) \\ q_1(n+1) \\ p_2(n+1) \\ q_2(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1(n) - \frac{K_1}{2\pi} \sin 2\pi q_1(n) - \frac{\mu}{2\pi} \sin[2\pi q_1(n) + 2\pi q_2(n)] \\ q_1(n) + p_1(n+1) \pmod{1} \\ p_2(n) - \frac{K_2}{2\pi} \sin 2\pi q_2(n) - \frac{\mu}{2\pi} \sin[2\pi q_1(n) + 2\pi q_2(n)] \\ q_2(n) + p_2(n+1) \pmod{1} \end{bmatrix}. \quad (7)$$

(7)式からわかるように、 $\mu = 0$ の時、Froeschlé写像は、2つの独立した標準写像と等価となる。従って、 $\mu$ が2つの標準写像の結合定数となっている。

(7)式のヤコビ行列の行列式を求めると、

$$\begin{aligned}
 & \langle (S_n - \langle S_n \rangle)^2 \rangle = nC(0) + 2 \sum_{j=1}^{n-1} C(j), \quad (10) \\
 & \text{det} \begin{bmatrix} \partial p_1(n+1)/\partial p_1(n) & \partial p_1(n+1)/\partial q_1(n) \\ \partial q_1(n+1)/\partial p_1(n) & \partial q_1(n+1)/\partial q_1(n) \\ \partial p_2(n+1)/\partial p_1(n) & \partial p_2(n+1)/\partial q_1(n) \\ \partial q_2(n+1)/\partial p_1(n) & \partial q_2(n+1)/\partial q_1(n) \end{bmatrix} \\
 & \begin{bmatrix} \partial p_1(n+1)/\partial p_2(n) & \partial p_1(n+1)/\partial q_2(n) \\ \partial q_1(n+1)/\partial p_2(n) & \partial q_1(n+1)/\partial q_2(n) \\ \partial p_2(n+1)/\partial p_2(n) & \partial p_2(n+1)/\partial q_2(n) \\ \partial q_2(n+1)/\partial p_2(n) & \partial q_2(n+1)/\partial q_2(n) \end{bmatrix} \\
 & = \text{det} \begin{bmatrix} 1 - K_1 \cos 2\pi q_1 - \mu \cos(2\pi q_1 + 2\pi q_2) \\ 1 - K_1 \cos 2\pi q_1 - \mu \cos(2\pi q_1 + 2\pi q_2) \\ 0 & -\mu \cos(2\pi q_1 + 2\pi q_2) \\ 0 & -\mu \cos(2\pi q_1 + 2\pi q_2) \\ 0 & -\mu \cos(2\pi q_1 + 2\pi q_2) \\ 0 & -\mu \cos(2\pi q_1 + 2\pi q_2) \\ 1 - K_2 \cos 2\pi q_2 - \mu \cos(2\pi q_1 + 2\pi q_2) \\ 1 - K_2 \cos 2\pi q_2 - \mu \cos(2\pi q_1 + 2\pi q_2) \end{bmatrix} = 1, \quad (8) \\
 \end{aligned}$$

となる。このことから、Froeschlé写像は、相空間内の任意の微小領域（4次元）をとったとき、写像の前後での微小領域の測度が変化しない保測写像であることがわかる。

次節では、こうした標準写像における相空間上でのカオス軌道の拡散に関する統計的性質について考察する。

### 3 標準写像における相空間上でのカオス軌道の拡散

相空間内の  $p$  方向のカオス軌道の拡散の統計的な性質を調べるために、 $n$  回写像から  $n+1$  回写像時の 1 ステップあたりの  $p$  の変化を  $u(n) \equiv p(n+1) - p(n)$  とする。 $n$  回写像間の  $p$  の変化は、

$$\begin{aligned}
 S_n(X_0) & \equiv p(n) - p(0) \\
 & = u(0) + u(1) + \dots + u(n-1), \quad (9)
 \end{aligned}$$

で与えられる。従って、 $n$  回写像間の  $p$  方向の平均 2 乗変位は、

ここで  $C(j) \equiv \langle [u(j) - \langle u(j) \rangle][u(0) - \langle u(0) \rangle] \rangle$  である。

一般に平均 2 乗変位は、次式のように  $n$  のべき乗に比例する。

$$\langle (S_n - \langle S_n \rangle)^2 \rangle \propto n^\zeta. \quad (11)$$

(11)式における指数が  $\zeta = 1$  の場合、

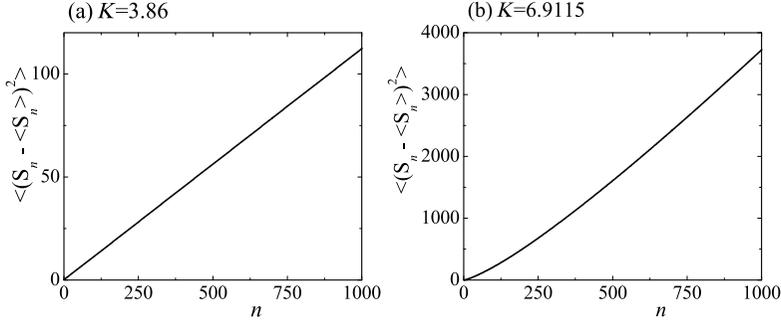
$$\langle (S_n - \langle S_n \rangle)^2 \rangle = 2Dn, \quad (12)$$

となる。ここで係数  $D$  は拡散係数である。このように平均 2 乗変位が  $n$  に比例する場合は「通常拡散」である。

一方、(11)式における指数が  $\zeta \neq 1$  の場合、 $u(j)$  には、 $C(j) \propto j^{-(\beta-1)}$ , ( $1 < \beta < 2$ ) のような長時間相関が生じていることになる。これは「異常拡散」と呼ばれる。図 2 は、相空間のカオスの海上に初期点をとって計算した平均 2 乗変位である。図 2(a) は、平均 2 乗変位が  $n$  に比例する通常拡散の例であり、図 2(b) は、平均 2 乗変位が  $n$  に比例しない異常拡散の例である。この場合の異常拡散は、カオス軌道が加速モードトーラスのまわりへ間欠的に粘着することに起因して生じるものである[5, 10, 11, 12]。  $Q$  周期の加速モードは、次式を満たす周期軌道のことである。

$$p^*(j+Q) - p^*(j) = \pm l, (K/2\pi) \sum_{j=1}^Q \sin[2\pi q(j)] = \mp l. \quad (13)$$

ここで  $l$  は、ゼロではない整数である。従って、 $p^*(j)$  は  $Q$  ステップ毎に  $\pm l$  だけ変位する。このような加速モードが安定に存在するパラメータ領域は、周期軌道  $\{X^*(n)\}$  の安定性解析によって求めることができる。  $Q=1$  の加速モードが安定に存在するパラメータ領域は、


 図 2：標準写像における $K=3.86$ と $K=6.9115$ での平均 2 乗変位 ( $N=10^7$ )

$$2\pi|l| < K < \sqrt{(2\pi l)^2 + 16}, \quad (14)$$

である。

次節では、標準写像や Froeschlé 写像における相空間上でのカオス軌道の相対拡散に関する統計的性質について考察する。

#### 4 カオス軌道の相対拡散

##### 4.1 標準写像における相空間上でのカオス軌道の相対拡散

標準写像における相空間内の 2 つの点の間の距離を、

$$Sr_n \equiv [p^1(n) - p^1(0)] - [p^2(n) - p^2(0)], \quad (15)$$

とおく。ここで、1 点拡散と相対拡散を区別するために

$$S_n^1 \equiv p^1(n) - p^1(0), \quad (16)$$

$$S_n^2 \equiv p^2(n) - p^2(0), \quad (17)$$

とおく。

相空間内の 2 点間の相対距離に関する平均 2 乗変位は、

$$\begin{aligned} & \langle (Sr_n - \langle Sr_n \rangle)^2 \rangle \\ &= \langle [S_n^1 - S_n^2 - \langle S_n^1 - S_n^2 \rangle]^2 \rangle, \\ &= \langle [S_n^1 - \langle S_n^1 \rangle - (S_n^2 - \langle S_n^2 \rangle)]^2 \rangle, \\ &= \langle (S_n^1 - \langle S_n^1 \rangle)^2 + (S_n^2 - \langle S_n^2 \rangle)^2 \\ &\quad - 2(S_n^1 - \langle S_n^1 \rangle)(S_n^2 - \langle S_n^2 \rangle) \rangle, \quad (18) \\ &= \langle (S_n^1 - \langle S_n^1 \rangle)^2 \rangle + \langle (S_n^2 - \langle S_n^2 \rangle)^2 \rangle \\ &\quad - 2\langle (S_n^1 - \langle S_n^1 \rangle)(S_n^2 - \langle S_n^2 \rangle) \rangle, \\ &= \langle (S_n^1 - \langle S_n^1 \rangle)^2 \rangle + \langle (S_n^2 - \langle S_n^2 \rangle)^2 \rangle \\ &\quad - 2\langle S_n^1 S_n^2 \rangle + 2\langle S_n^1 \rangle \langle S_n^2 \rangle, \end{aligned}$$

となる。

標準写像において、(18)式の右辺第 1 項と第 2 項は、統計的に同等であり、もし、第 3 項の  $\langle S_n^1 S_n^2 \rangle$  と第 4 項の  $\langle S_n^1 \rangle \langle S_n^2 \rangle$  がゼロであれば、相対距離の平均 2 乗変位は、通常の平均 2 乗変位の 2 倍になることがわかる。

ここで、相対拡散と 1 点拡散におけるステップ数  $n$  に対する平均 2 乗変位の変化を与える指数を区別するために

$$\langle (Sr_n - \langle Sr_n \rangle)^2 \rangle \propto n^{\xi}, \quad (19)$$

$$\langle (S_n^1 - \langle S_n^1 \rangle)^2 \rangle \propto n^{\xi_1}, \quad (20)$$

$$\langle (S_n^2 - \langle S_n^2 \rangle)^2 \rangle \propto n^{\xi_2}, \quad (21)$$

と表記する。

図 3 は、標準写像における  $K=3.86$  と  $K=6.9115$  での相空間内の初期点を、 $\{p^1(0), q^1(0)\}$

$= \{0.00001, 0.50001\}$ と $\{p^2(0), q^2(0)\} = \{-0.00001, 0.49999\}$ にとった場合の各点の1点拡散と2点間の相対拡散を比較したグラフである。2つの軌道のそれぞれの1点拡散は、理論的に $\langle (S_n^1 - \langle S_n^1 \rangle)^2 \rangle = \langle (S_n^2 - \langle S_n^2 \rangle)^2 \rangle$ になるはずであり、図3(a)と(b)は数値的にそうであることを示している。

図4は、 $\langle (Sr_n - \langle Sr_n \rangle)^2 \rangle$ と $2\langle (S_n^1 - \langle S_n^1 \rangle)^2 \rangle$ との差と $\langle (Sr_n - \langle Sr_n \rangle)^2 \rangle$ と $2\langle (S_n^2 - \langle S_n^2 \rangle)^2 \rangle$ との差のグラフである。通常拡散が生じる $K=3.86$ では、その差は $n=1000$ でも $\pm 2.5$ に抑えられているのに対して、異常拡散が生じる $K=6.9115$ では、 $n=1000$ で $\pm 100$ 程度まで大きく

なっている。異常拡散が発生している場合は、相対拡散と1点拡散の2倍とのズレは、通常拡散の場合に比べて非常に大きくなっている。図5は、図3(b)の両対数グラフである。図5のグラフの傾きを、 $n=10\sim 1000$ のデータに最小2乗法を利用して、相対拡散と1点拡散の指数を求めた。その結果、 $\zeta=1.281$ ,  $\zeta_1=1.276$ ,  $\zeta_2=1.283$ となった。各点の平均2乗変位の指数 $\zeta_1$ ,  $\zeta_2$ , 相対拡散の平均2乗変位の指数 $\zeta$ は、ほぼ等しい値になっている。

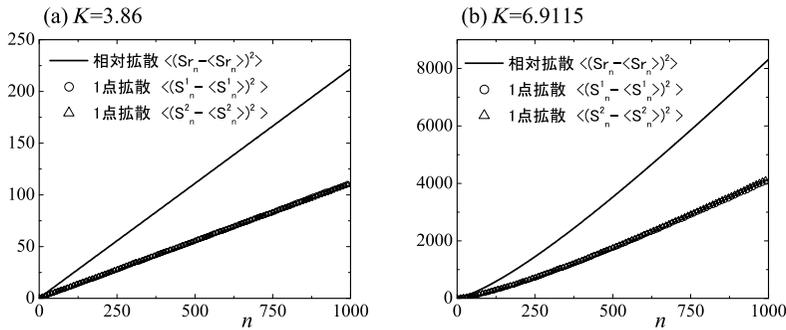


図3：標準写像における(a)  $K=3.86$ と(b)  $K=6.9115$ での各点の平均2乗変位と2点間の平均2乗変位 ( $N=10^8$ )

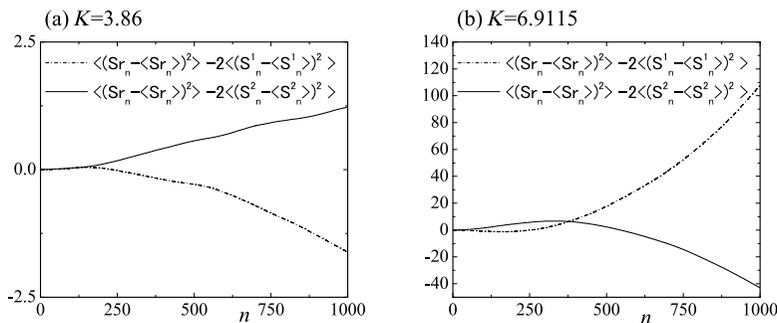


図4：標準写像における(a)  $K=3.86$ と(b)  $K=6.9115$ での2点間の平均2乗変位と各点の平均2乗変位の2倍との差 ( $N=10^8$ )

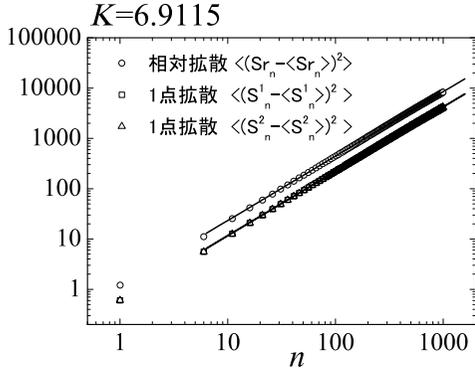


図5：標準写像における $K=6.9115$ での各点の平均2乗変位と2点間の平均2乗変位の両対数グラフ( $N=10^8$ )

#### 4.2 Froeschlé写像におけるカオス軌道の相対拡散

Froeschlé写像における相空間内の2つの点の間の距離を、

$$Sr_n \equiv \sqrt{[p_1^1(n) - p_1^2(n)]^2 + [p_2^1(n) - p_2^2(n)]^2}, \quad (22)$$

とおく。

相空間内の2つの点の間の相対距離に関する平均2乗変位は、

$$\begin{aligned} & \langle (Sr_n - \langle Sr_n \rangle)^2 \rangle \\ &= \left\langle \left\{ \sqrt{[p_1^1(n) - p_1^2(n)]^2 + [p_2^1(n) - p_2^2(n)]^2} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \sqrt{[p_1^1(n) - p_1^2(n)]^2 + [p_2^1(n) - p_2^2(n)]^2} \right\}^2 \right\rangle, \quad (23) \\ &= \langle [p_1^1(n) - p_1^2(n)]^2 + [p_2^1(n) - p_2^2(n)]^2 \rangle \\ & \quad - \left\langle \left\{ \sqrt{[p_1^1(n) - p_1^2(n)]^2 + [p_2^1(n) - p_2^2(n)]^2} \right\}^2 \right\rangle, \end{aligned}$$

となる。

図6は、Froeschlé写像の $p_1-p_2$ 平面上での近接した2点( $\{q_1^1(0), p_1^1(0), q_2^1(0), p_2^1(0)\} = \{0.501, 0.001, 0.501, 0.001\}$ と $\{q_1^2(0), p_1^2(0), q_2^2(0), p_2^2(0)\} = \{0.502, 0.002, 0.502, 0.002\}$ )の軌跡である。

まず、結合定数が $\mu = 0$ の $\{q_1(n), p_1(n)\}$ と

$\{q_2(n), p_2(n)\}$ が独立に時間発展をする場合を考える。図7は、 $K_1=6.9115, K_2=6.4717$ の場合の2つの初期点の各点の1点拡散と2点間の相対拡散のグラフである。 $K_1, K_2$ の2つのパラメータとして、標準写像において、いずれも加速モードトラスが安定に存在する $K_1=6.9115, K_2=6.4717$ を選択した。また、2つの初期点として $\{q_1^1(0), p_1^1(0), q_2^1(0), p_2^1(0)\} = \{0.501, 0.001, 0.501, 0.001\}$ と $\{q_1^2(0), p_1^2(0), q_2^2(0), p_2^2(0)\} = \{0.502, 0.002, 0.502, 0.002\}$ を選択した。図7(b)の両対数グラフの傾きを、 $n=10 \sim 1000$ のデータに最小2乗法を利用して、相対拡散と1点拡散の指数を求めた。その結果、 $\zeta = 1.418, \zeta_1 = 1.302, \zeta_2 = 1.497$ となった。各点の平均2乗変位の指数 $\zeta_1$ と $\zeta_2$ が異なっており、相対拡散の平均2乗変位の指数 $\zeta$ は、その中間の値になっている。これは、 $\mu = 0$ のため、2つの初期点異なる $K_1, K_2$ で独立に時間発展をするためである。

次に、 $\mu > 0$ で $\{q_1(n), p_1(n)\}$ と $\{q_2(n), p_2(n)\}$ が相互に結合して時間発展をする場合を考える。図8は、 $K_1=6.9115, K_2=6.4717, \mu =$

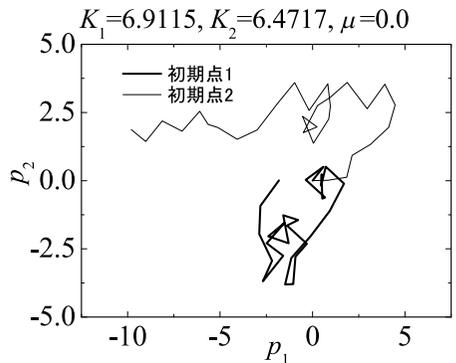


図6：Froeschlé写像における $K_1=6.9115, K_2=6.4717, \mu = 0$ での $p_1-p_2$ 平面上の近接した2点の軌跡

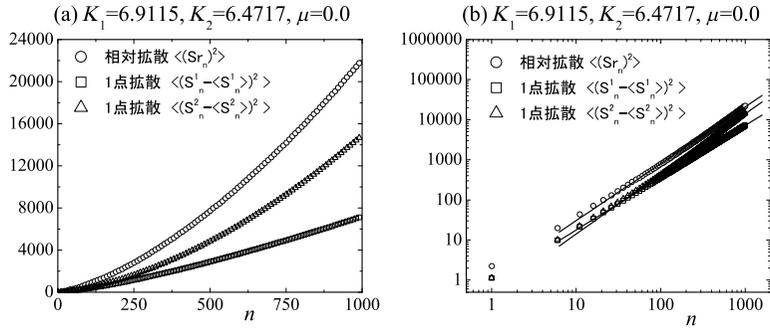


図7 : (a) Froeschlé写像における $K_1=6.9115, K_2=6.4717, \mu=0$ での1点拡散と相対拡散 ( $N=10^8$ )。 (b) (a)のグラフの両対数グラフ

0.001の場合の2つの初期点の各点の1点拡散と2点間の相対拡散のグラフである。2つの初期点として $\{q_1^1(0), p_1^1(0), q_2^1(0), p_2^1(0)\} = \{0.501, 0.001, 0.501, 0.001\}$ と $\{q_1^2(0), p_1^2(0), q_2^2(0), p_2^2(0)\} = \{0.502, 0.002, 0.502, 0.002\}$ を選択した。図8(b)の両対数グラフの傾きを、 $n=10\sim 1000$ のデータに最小2乗法を利用して、相対拡散と1点拡散の指数を求めた。その結果、 $\zeta=1.502, \zeta_1=1.522, \zeta_2=1.479$ となった。 $\mu=0.0$ の場合と同様に、各点の平均2乗変位の指数 $\zeta_1$ と $\zeta_2$ が異なっており、相対拡散の平均2乗変位の指数 $\zeta$ は、その中間の値になっている。標準写像の場合は、異常拡散が生じるパラメータでも、図

3(b)のように、1点拡散の平均2乗変位である $\langle (S_n^1 - \langle S_n^1 \rangle)^2 \rangle$ と $\langle (S_n^2 - \langle S_n^2 \rangle)^2 \rangle$ はほぼ等しく $\zeta_1$ と $\zeta_2$ も等しかったが、Froeschlé写像では大きく異なっている。また、 $\mu=0.0$ に比べて、 $\mu=0.001$ の方が指数が0.1程度大きくなっており、異常拡散が強くなっている。

### 5 まとめと課題

2次元の保測写像である標準写像と2つの標準写像を結合した4次元の保測写像であるFroeschlé写像における相空間上のカオス軌道の相対拡散の統計的性質を数値的に調べた。

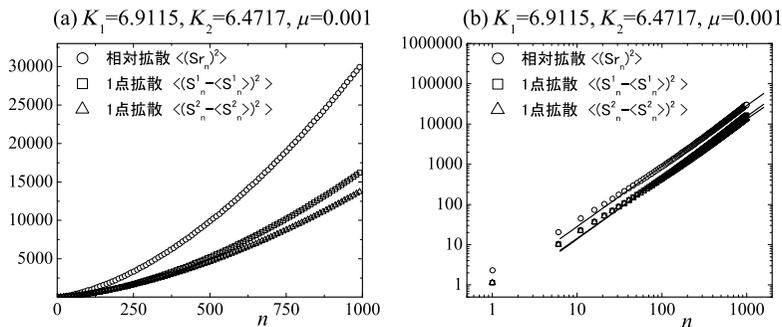


図8 : (a) Froeschlé写像における $K_1=6.9115, K_2=6.4717, \mu=0.001$ での1点拡散と相対拡散 ( $N=10^8$ )。 (b) (a)のグラフの両対数グラフ

標準写像において、通常拡散が生じるパラメータ  $K=3.86$  では、相空間上の2つのカオス軌道間の平均2乗変位は、1点拡散のほぼ2倍となった (図3(a))。一方、異常拡散が生じるパラメータ  $K=6.9115$  では、2つのカオス軌道間の平均2乗変位は、1点拡散の2倍からのズレが通常拡散に比べて大きくなる傾向が出た (図4(b))。  $K=3.86$  と  $K=6.9115$  では、いずれも1点拡散の平均2乗変位  $\langle (S_n^1 - \langle S_n^1 \rangle)^2 \rangle$  と  $\langle (S_n^2 - \langle S_n^2 \rangle)^2 \rangle$  が共に等しい (図3(a), (b)) ため、数値計算のアンサンブル数  $N$  は十分に取れているものと判断される。しかし、  $K=6.9115$  での相対拡散の1点拡散の2倍からのズレは、数値誤差によるものなのかどうかを明確にするために、数値計算のアンサンブル数  $N$  を増やして調べる必要がある。

Froeschlé写像において、結合定数が  $\mu=0$ 、  $K_1$  および  $K_2$  が標準写像において加速モードが安定に存在するパラメータ ( $K_1=6.9115$ ,  $K_2=6.4717$ ) では、相空間上の各点の平均2乗変位の指数が  $\zeta_1=1.302$ ,  $\zeta_2=1.497$  と大きく異なり、相対拡散の平均2乗変位の指数は、その中間の値  $\zeta=1.418$  となった。

結合定数  $\mu$  が正 ( $\mu=0.001$ )、  $K_1$  および  $K_2$  が標準写像において加速モードが安定に存在するパラメータ ( $K_1=6.9115$ ,  $K_2=6.4717$ ) でも、相空間上の各点の平均2乗変位の指数  $\zeta_1=1.522$ ,  $\zeta_2=1.479$  が異なり、相対拡散の平均2乗変位の指数は、その中間の値  $\zeta=1.502$  となった。  $\mu=0$  の場合は、  $\{q_1(n), p_1(n)\}$  と  $\{q_2(n), p_2(n)\}$  が独立に時間発展をするために各点の平均2乗変位の指数が異なるが、  $\mu \neq 0$  でも異なった。また、結合定数が  $\mu=0$  の時に比べて相対拡散、1点拡散の平均2乗変位の指数  $\zeta$ ,  $\zeta_1$ ,  $\zeta_2$  が大きくなった。結合定数が正 ( $\mu=0.001$ ) になると、

異常拡散が強くなった原因が、結合により、強い相関のある運動が生成されたのであるとすれば大変興味深い現象である。これらの結果が、Froeschlé写像が標準写像に比べて、次元が2次元から4次元に増えたことにより統計的な収束が遅くなるために生じたものなのかどうかを明確にするために、今後、数値計算のアンサンブル数  $N$  を増やして調べる必要がある。

## 参考文献

- [1] L.F. Richardson, Proc. Roy. Soc. A 110, 709-737 (1926).
- [2] H. G. Schuster: *Deterministic Chaos*, VCH, Weinheim (1995).  
E. Ott: *Chaos in Dynamical Systems*, Cambridge University Press (2002).
- [3] 森肇・蔵本由紀：散逸構造とカオス (岩波講座現代の物理学)、岩波書店 (1997)。
- [4] 井上政義・秦浩起：カオス科学の基礎と展開—複雑系の理解に向けて—、共立出版 (1999)。  
井上政義：やさしくわかるカオスと複雑系の科学、日本実業出版社 (1996)。
- [5] A. J. Lichtenberg and M. A. Leiberman: *Regular and Chaotic Dynamics*, Springer-Verlag, New York, (1992).
- [6] T. H. Solomon and J.P. Gollub, Phys. Rev. A38 6280-6286 (1988).
- [7] B. V. Chirikov: A universal instability of many-dimensional oscillator systems, Phys. Rep., Vol. 52, pp. 263-379 (1979).
- [8] J. M. Greene: A method for determining a stochastic transition, J. Math. Phys., Vol. 20, pp. 1183-1201 (1979).
- [9] C. Froeschlé: On the Number of Isolating Integrals in Systems with Three Degrees of

- Freedom, *Astrophys. Space Sci.* 14, 110-117 (1971).
- C. Froeschlé: Numerical Study of a Four Dimensional Mapping, *Astron. and Astrophys* 16, 172-189(1972).
- C. Froeschlé and J.-P. Scheidecker: Numerical Study of a Four Dimensional Mapping II, *Astron. and Astrophys.* 22, 431-436(1973).
- [10] R. Ishizaki, T. Horita, T. Kobayashi and H. Mori: Anomalous Diffusion Due to Accelerator Modes in the Standard Map, *Prog. Theor. Phys.*, Vol. 85, No. 5, pp. 1013-1022 (1991).
- R. Ishizaki, T. Horita and H. Mori: Anomalous Diffusion and Mixing of Chaotic Orbits in Hamiltonian Dynamical Systems, *Prog. Theor. Phys.*, Vol. 89, No. 5, pp. 947-963 (1993).
- [11] R. Ishizaki, M. Inoue: Application of Tsallis Nonextensive Statistics to the Anomalous Diffusion of the Standard Map, *Prog. Theor. Phys.*, Vol. 114, No. 5, pp. 943-952 (2005).
- [12] R. Ishizaki, S. Kuroki, H. Tominaga, N. Mori and H. Mori: Time Correlations and Diffusion of a Conservative Forced Pendulum, *Prog. Theor. Phys.*, Vol. 109, No. 2, pp. 169-186 (2003).