福岡県立大学人間社会学部紀要
2008, Vol. 17, No. 1, 29－43

Hénon-Heiles系におけるカオスのパワースペクトルのピーク構造

石　崎　龍　二

概要　ハミルトン系のカオスの研究でよく取り上げられるHénon-Heiles系のカオス軌道の統計的性質について調べた。非線形性が最も強いパラメータE=1/6における４つの力学変数x，y，p_x，p_yについて自己相関関数を数値的に求めた結果、４つの力学変数x，y，p_x，p_yに関する自己相関関数はすべて振動しながら０に減衰することがわかった。また、xとy，p_xとp_yの自己相関関数が一致することがわかった。

次に、yとp_yのパワースペクトルを高速フーリエ変換（FFT）により求めた。その結果、$y(t)$のパワースペクトル$I_y(\omega)$には、ω_0=0.000，ω_1=1.002，ω_2=0.797に、$p_y(t)$のパワースペクトル$I_{p_y}(\omega)$には、ω_0'=1.002，ω_1'=0.799に振動数ピークがみられた。

パワースペクトル$I_y(\omega)$の$\omega=\omega_0$付近のピーク構造は、ローレンチアンの近似式とよく一致し、$\omega=\omega_1$と$\omega=\omega_2$付近のピーク構造は、非対称ローレンチアンの近似式とよく一致した。パワースペクトル$I_y(\omega)$の$\omega=\omega_0$付近のローレンチアンは、自己相関関数$C_y(t)$では指数関数減衰に対応している（減衰定数γ_0=0.01657、相関時間$\tau_0=1/\gamma_0\simeq60.35$）。パワースペクトル$I_y(\omega)$の$\omega=\omega_1$と$\omega=\omega_2$付近の非対称ローレンチアンは、自己相関関数$C_y(t)$では振動型の指数関数減衰に対応している（減衰定数$\gamma_1$=0.02764、相関時間$\tau_1=1/\gamma_1\simeq36.18$、減衰定数$\gamma_2$=0.02844、相関時間$\tau_2=1/\gamma_2\simeq35.16$）。

パワースペクトル$I_{p_y}(\omega)$の$\omega=\omega_0'$と$\omega=\omega_1'$付近のピーク構造は、非対称ローレンチアンの近似式とよく一致した。パワースペクトル$I_{p_y}(\omega)$の$\omega=\omega_0'$と$\omega=\omega_1'$付近の非対称ローレンチアンは、自己相関関数$C_{p_y}(t)$では振動型の指数関数減衰に対応している（減衰定数γ_0'=0.02524、相関時間$\tau_0'=1/\gamma_0'\simeq39.62$、減衰定数$\gamma_1'$=0.02955、相関時間$\tau_1'=1/\gamma_1'\simeq33.84$）。

キーワード：ハミルトン系、カオス、自己相関関数、パワースペクトル、ローレンチアン

１　はじめに

自然現象を記述する力学系（dynamical systems）は、系の時間発展に対してエネルギーが保存される保存系（conservative systems）と摩擦などによりエネルギーが失われる散逸系（dissipative systems）に分けられる。保存系は、エネルギーを表す関数である

ハミルトニアン（Hamiltonians）を使ってハミルトン系（Hamiltonian systems）と呼ばれる方程式系によって記述される。ハミルトン系は、ハミルトンの正準方程式によって時間発展する力学系である。ハミルトン系における正準変数（canonical variable）の運動は、正準変数を座標とする相空間（phase space）内の微小体積が不変に保たれるように時間発展する。これはLiouvilleの定理と呼ばれる重要な性質である。一方、散逸系では、時間発展と共に力学変数を座標とする相空間内の微小体積は小さくなる。そのため散逸系では、相空間内での軌道は初期条件によらずに時間の経過と共にアトラクター（attractor）と呼ばれる領域に吸引される。このように保存系と散逸系の相空間内での状態点の軌道の特性には、大きな違いがある。

力学系の解析は、まず求積法によって運動方程式の厳密解を求める試みがなされる。もし厳密解が求まらなければ、摂動理論を用いて運動方程式の近似解を求める試みがなされる。もし近似解を求めることも困難な場合には、コンピュータを用いて運動方程式を数値的に解く試みが必要となる[1)]。一般に、運動方程式に非線形項が入るとカオスが発生し、求積法や摂動理論では解くことが困難となることが知られている[2),3),4)]。従って、非線形項が入る力学系の解の性質を調べるためにはコンピュータによる数値計算が不可欠である。

本稿では、ハミルトン系における相空間上でのカオスの海での状態点の運動の統計的性質を考察する。

散逸系でカオスが発生する場合の相空間内での状態点は、一般に初期条件によらずに時間の経過と共にストレンジ・アトラクター（strange attractor）に吸引される。一方、ハミルトン系においてカオスが発生する場合の相空間は、一般に規則的な運動をする領域である「トーラスの島」と不規則的な運動をする領域である「カオスの海（chaotic sea）」から構成されるので、初期条件がトーラスの島の中にあれば状態点は規則的な運動をし、初期条件がカオスの海の中にあれば状態点はカオス運動をする。このようにハミルトン系のカオスでは、初期条件により規則的な運動をするか、カオス運動をするかに分かれる性質をもっている。

ハミルトン系ではカオス軌道は非周期軌道であり、時間の経過と共にカオスの海を覆い尽くすので、ハミルトン系のカオスの統計的性質は単純ではないかと考えられるかもしれないが、そうではない。Poincaré-Birkhoffの定理により、摂動が加わると周期が有理数の固定点のまわりには安定な楕円点（elliptic fixed point）と不安定な双曲点（hyperbolic fixed point）が交互に並ぶ性質がある。そのためカオスが発生する場合の相空間には、島の周りに島が自己相似的に存在するような島の階層構造が形成される。したがって、トーラスの島とカオスの海の境界領域は複雑な構造をなしており、カオスの海上での運動は非常に複雑である。

私は、これまで少数自由度のハミルトン系におけるカオスの統計的な性質を、コンピュータによる数値計算によって調べてきた。その結果、少数自由度のハミルトン系では、カオス軌道がトーラスの島とカオスの海の境界領域に停滞するため、種々の物理量に長時間相関があらわれることを明らかにしてきた[5),6)]。ハミルトン系のカオス解をもつ微分方程式系の統計的な性質を調べるためには、このようなカオス軌道の長時間相関があるため、非常に長い数値計算

が必要である。そのためハミルトン系のカオスの統計的な性質の研究は、散逸系のカオスの研究に比べて解析が難しい。

前稿[7]では、Hénon-Heiles系[8]におけるカオス軌道の統計的性質として自己相関関数やパワースペクトルについて考察した。前稿[7]で調べた変数は4変数のうちyの1変数のみであった。またパワースペクトルのピーク付近の構造については解析していなかった。

本稿では、非線形性が最も強いパラメータE=1/6に着目し、その他の3つの変数x, p_x, p_yを含めた4変数のカオス軌道の統計的性質を調べ、変数間の相互相関について調べた。また、パワースペクトルのピーク付近の構造を詳細に調べた。

第2節でHénon-Heiles 系の物理的な意味について紹介し、第3節でカオス時系列の自己相関関数と相互相関関数の数値計算結果を示す。第4節でカオス時系列のパワースペクトルとそのピーク構造の解析結果を示し、第5節で今回の数値計算のまとめと課題について考察する。

2　Hénon-Heiles系

M. HénonとC. Heilesは、Hénon-Heiles系において、非線形パラメータであるエネルギー積分Eが大きくなるに従い相空間内の可積分な領域が壊れていく様子を、計算機実験によって示した（1964年）[8]。これは、ハミルトン系の相空間のカオス軌道が数値的に描かれた最初の研究として知られている。

Hénon-Heiles系は、戸田格子[9]とも関係付けられる興味深いモデルである（付録A）。

Hénon-Heiles系のハミルトニアンHは、次式で与えられる。

$$
\begin{aligned}
&H=\frac{1}{2}(p_x^2+p_y^2)+U(x,y),\\
&U(x,y)=\frac{1}{2}\left(x^2+y^2+2x^2y-\frac{2}{3}y^3\right).
\end{aligned}
\tag{1}
$$

相空間上の状態変数は、$\vec{X}(t)=\{x(t),\ y(t),\ p_x(t),\ p_y(t)\}$である。(1)式のハミルトニアン$H$より、$\vec{X}(t)$の時間発展方程式は、次式より与えられる。

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{p}_x\\ \dot{p}_y\end{bmatrix}=\vec{F}(\vec{X}(t))&=\begin{bmatrix}\partial H/\partial p_x\\ \partial H/\partial p_y\\ -\partial H/\partial x\\ -\partial H/\partial y\end{bmatrix}\\
&=\begin{bmatrix}p_x\\ p_y\\ -x\\ -y\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ -2xy\\ -x^2+y^2\end{bmatrix}.
\end{aligned}
\tag{2}
$$

図1は、Hénon-Heiles系のポテンシャルの等高線図である。エネルギー積分が$E=E_c$（=1/6）以下であれば、Hénon-Heiles系の相空間内での軌道は有限な領域に束縛される。

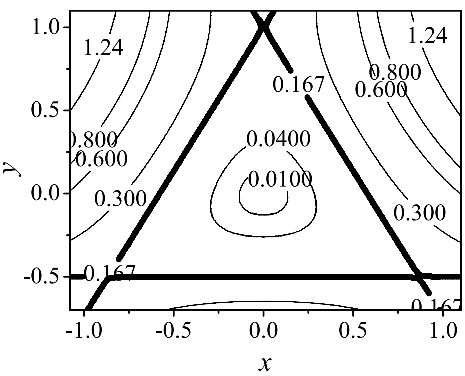

図1：Hénon-Heiles系のポテンシャル$U(x,\ y)$の等高線（Uの値が等しい）。太い線は、UがE_c＝1/6に等しい[7]

図2は、E＝1/6における相空間内でのカオスの海上に初期点をとった軌道$\vec{X}(t)$が、

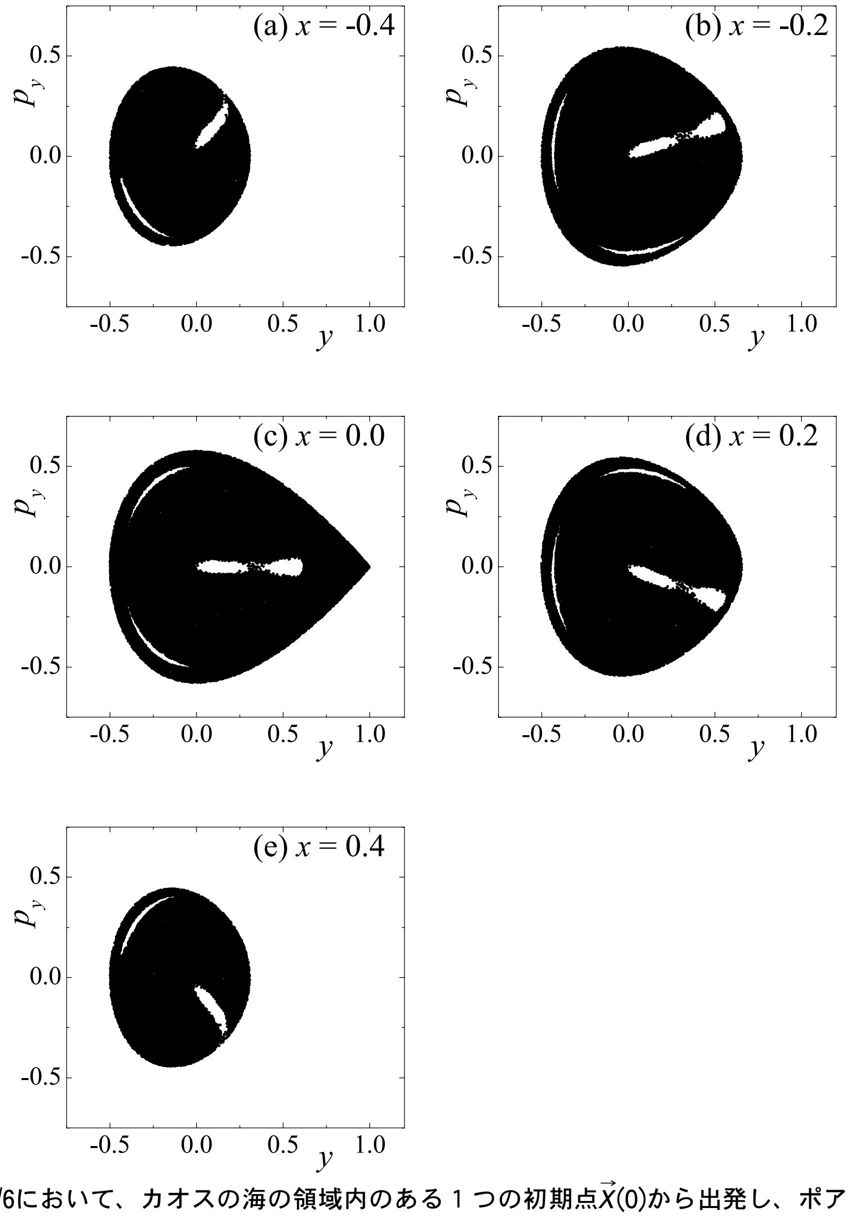

図２：E＝1/6において、カオスの海の領域内のある１つの初期点$\vec{X}(0)$から出発し、ポアンカレ断面Σ^x[(a)$x=-0.4$, (b)$x=-0.2$, (c)$x=0.0$, (d)$x=0.2$, (e)$x=0.4$で$y(t)$, $p_y(t)$の軸を含む平面］を$p_x(t)>0$の向きに通過する軌道$\vec{X}(t)$のプロット

(a) $x=-0.4$, (b) $x=-0.2$, (c) $x=0.0$, (d) $x=0.2$, (d) $x=0.4$でy-p_y平面（ポアンカレ断面Σ^x）を$p_x(t)>0$の向きに通過する軌道のプロットである。図2にあらわれる黒い点の集合はカオスの海の領域である。

カオス軌道は、図2にあらわれるカオスの海上を非周期的に運動する。それでは、Hénon-Heiles系により生成されるカオス時系列にはどのような統計的性質があるのだろうか。次節では、Hénon-Heiles系のカオス時系列の自己相関関数と相互相関関数を数値的に求める。

3　カオス時系列の相関関数

3．1　自己相関関数

相空間内のカオスの海上の状態点は、不安定な双曲点から伸びる不安定多様体（unstable manifolds）に沿って時間発展し、トーラスの島の間をぬうようにして運動をするため、カオス軌道には不規則性の中に周期性が存在している。また、カオスが発生すると、初期条件のわずかな誤差が時間の経過とともに指数関数的に拡大されるため、観測誤差をゼロとしない限り長時間後の解を予測することができない（初期値鋭敏性）。つまり初期条件の情報が、時間の経過とともに失われる性質がある。

そこでカオス時系列の中に隠れている周期や初期状態に関する情報の喪失過程を調べるために時系列の自己相関関数を調べた。

Hénon-Heiles系の変数はx, y, p_x, p_yの4変数である。次式で定義される4変数に関するカオス時系列の自己相関関数を調べた。

$$C_{xx}(t)\equiv\langle x(t)x(0)\rangle =\lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{\tau}\int_0^\tau ds\ x(t+s)x(s), \tag{3}$$

$$C_{yy}(t)\equiv\langle y(t)y(0)\rangle =\lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{\tau}\int_0^\tau ds\ y(t+s)y(s), \tag{4}$$

$$C_{p_xp_x}(t)\equiv\langle p_x(t)p_x(0)\rangle =\lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{\tau}\int_0^\tau ds\ p_x(t+s)p_x(s), \tag{5}$$

$$C_{p_yp_y}(t)\equiv\langle p_y(t)p_y(0)\rangle =\lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{\tau}\int_0^\tau ds\ p_y(t+s)p_y(s). \tag{6}$$

上式を数値計算より求めるために次式のように時間積分を有限の長さ$N\Delta t$の離散的時系列$t=i\Delta t$（$i=0,1,2,\cdots,N$）の和に置き換えた。

$$C_{xx}(t)=\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}x(t+i\Delta t)x(i\Delta)t, \tag{7}$$

$$C_{yy}(t)=\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}y(t+i\Delta t)y(i\Delta)t, \tag{8}$$

$$C_{p_xp_x}(t)=\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}p_x(t+i\Delta t)p_x(i\Delta)t, \tag{9}$$

$$C_{p_yp_y}(t)=\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}p_y(t+i\Delta t)p_y(i\Delta)t. \tag{10}$$

図3は、自己相関関数の数値計算結果である。x, y, p_x, p_yに関するいずれの自己相関関数も、振動しながら0に漸近している。系に混合性がある場合、初期の情報が時間の経過と共に失われることから、Hénon-Heiles系のカオス軌道には、混合性があることがわかる。

また図3より、$C_{xx}(t)$と$C_{yy}(t)$、$C_{p_xp_x}(t)$と$C_{p_yp_y}(t)$とは非常によく似ていることがわかる。そこで、$C_{xx}(t)$と$C_{yy}(t)$、$C_{p_xp_x}(t)$と$C_{p_yp_y}(t)$とを重ねてみた（図4）。図4より、変数xの自己相関関数$C_{xx}(t)$とyの自己相関関数$C_{yy}(t)$、変数p_xの自己相関関数$C_{p_xp_x}(t)$とp_yの自己相関関数$C_{p_yp_y}(t)$は一致することがわかった。従って、Hénon-Heiles系のカオスの統計的性質は、xとp_xの2変数、もしくはyと

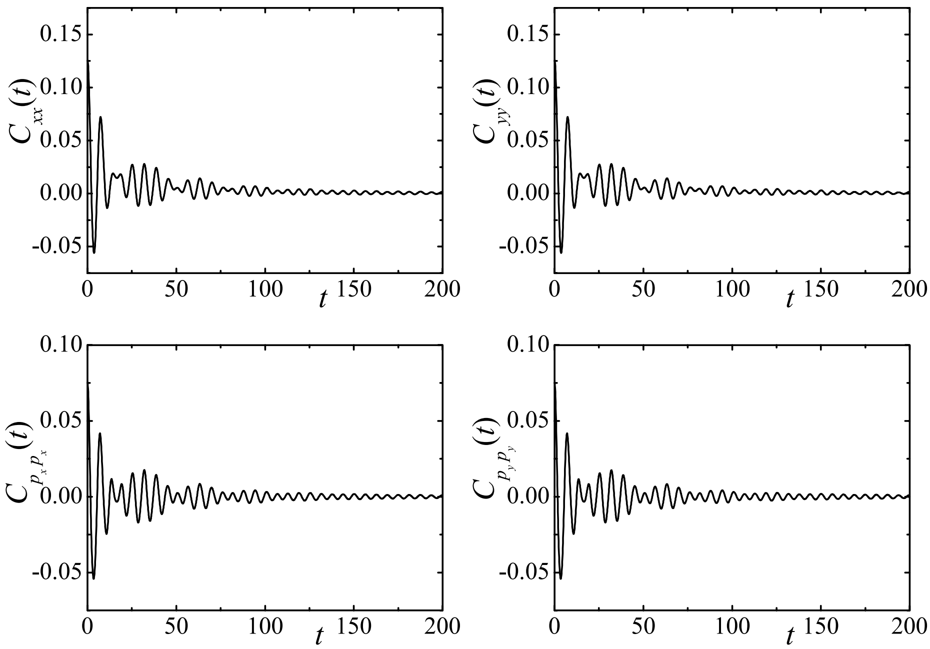

図3：E＝1/6における(7), (8), (9), (10)式の数値計算から得られたx, y, p_x, p_yに関する自己相関関数(Δt＝$2\pi/64$, N＝10^7)

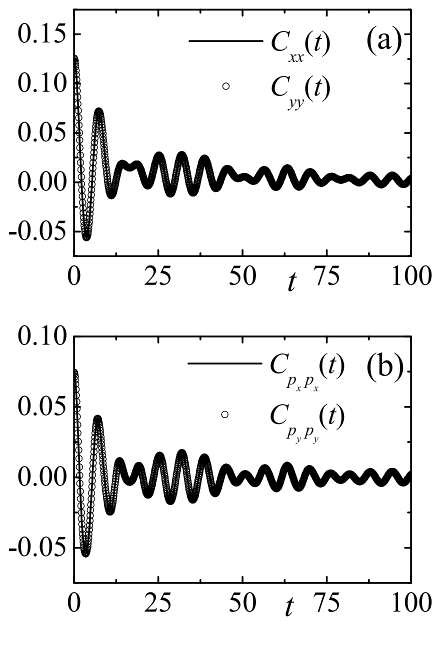

図4：図3における(a)$C_{xx}(t)$とC_{yy}(t), (b)$C_{p_xp_x}$(t)と$C_{p_yp_y}(t)$と重ねたグラフ

p_yの2変数を調べれば十分であることがわかる。

3．2　相互相関関数

変数間の時間遅れを調べるために、次式で定義される変数yと変数p_yとの間の相互相関関数[10]を調べた。

$$C_{yp_y}(t)\equiv\langle y(t)p_y(0)\rangle$$
$$=\lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{\tau}\int_0^{\tau}ds\ y(t+s)p_y(s). \qquad (11)$$

上式を数値計算より求めるために次式のように時間積分を離散的時系列$t=i\Delta t(i=0,1,2,\cdots)$の和に置き換えた。

$$C_{yp_y}(t)=\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}y(t+i\Delta t)p_y(i\Delta t). \qquad (12)$$

図5は、相互相関関数の数値計算結果である。その結果、相互相関関数$C_{yp_y}(t)$の最初のピークが$t=\Delta\tau=1.6689\cdots$にあるため$y(t)$と

$p_y(t)$との間には、$\Delta\tau$だけの遅れがあることがわかった。$p_y(t)$は$y(t)$の時間微分であるから、もし$y(t)$に周期T'の周期性があれば、$\Delta\tau=T'/4$となるはずである。

そこで、相空間上の$x=0$の$y-p_y$平面をポアンカレ断面Σ^xとし、$p_x>0$で横切り、次に$p_x>0$でポアンカレ断面Σ^xを横切るまでの回帰時間を調べてみた。図6の結果より、ポアンカレ断面Σ^xへの回帰時間分布のピークが$t_{max}=6.67588\cdots$となっており、相互相関関数$C_{yp_y}(t)$の最初のピークの時間遅れと$\Delta\tau=t_{max}/4$の関係があることがわかった。相互相関関数$C_{yp_y}(t)$の時間遅れ$\Delta\tau$は、ポアンカレ断面Σ^xへの回帰時間t_{max}と関係していると考えられる。

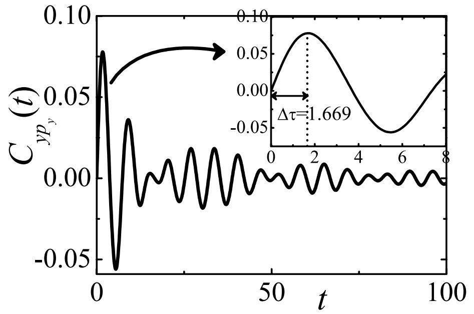

図5　$E=1/6$におけるyとp_yの相互相関係数（$\Delta t=2\pi/64$, $N=10^7$）

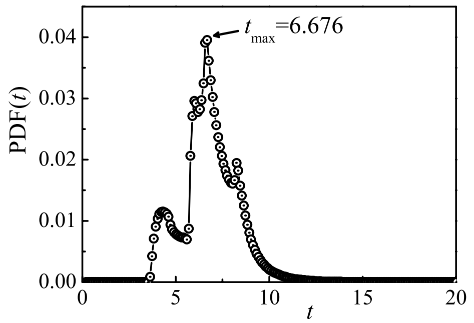

図6：$E=1/6$におけるカオス軌道のポアンカレ断面Σ^x($x=0$のy-p_y平面)への回帰時間分布(縦軸は総数$N=1410065408$に対する割合)

4　カオス時系列のパワースペクトル

カオス軌道は非周期軌道であり、厳密に言えば周期は存在しないが、一部に周期性をもっている。その周期性を取り出すために、次式で定義される変数y, p_yに関するカオス時系列のパワースペクトルを調べた。

$$
\begin{aligned}
I_y(\omega) &\equiv \lim_{\tau\to\infty}\frac{\tau}{2\pi}\left\langle\left|\frac{1}{\tau}\int_0^\tau dt\ y(t)e^{-i\omega t}\right|^2\right\rangle \\
&= \lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^\tau dt\left(1-\frac{t}{\tau}\right)C_{yy}(t)\cos(\omega t),
\end{aligned} \tag{13}
$$

$$
\begin{aligned}
I_{p_y}(\omega) &\equiv \lim_{\tau\to\infty}\frac{\tau}{2\pi}\left\langle\left|\frac{1}{\tau}\int_0^\tau dt\ p_y(t)e^{-i\omega t}\right|^2\right\rangle \\
&= \lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^\tau dt\left(1-\frac{t}{\tau}\right)C_{p_yp_y}(t)\cos(\omega t).
\end{aligned} \tag{14}
$$

上式よりわかるように$y(t)$, $p_y(t)$のパワースペクトル$I_y(\omega)$, $I_{p_y}(\omega)$は、それぞれ$y(t)$, $p_y(t)$の自己相関関数$C_y(t)$, $C_{p_y}(t)$のフーリエ変換である［ウィーナー・ヒンチン(Wiener-Khinchin)の定理[11]］。(13)、(14)式を数値計算より求めるために、次式のように(13)、(14)式の時間積分を離散的時系列$t=m\Delta t$($m=0,1,2,\cdots$), $\tau=N'\Delta t$の和に置き換えた。

$$
\begin{aligned}
I_y(\omega) &= \frac{\tau}{2\pi}\frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1} \\
&\left|\frac{1}{N'}\sum_{m=0}^{N'-1} y(l\Delta t+m\Delta t)e^{-i\omega m\Delta t}\right|^2,
\end{aligned} \tag{15}
$$

$$
\begin{aligned}
I_{p_y}(\omega) &= \frac{\tau}{2\pi}\frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1} \\
&\left|\frac{1}{N'}\sum_{m=0}^{N'-1} p_y(l\Delta t+m\Delta t)e^{-i\omega m\Delta t}\right|^2.
\end{aligned} \tag{16}
$$

パワースペクトルを推定する方法として、時系列から直接求めるノンパラメトリックな手法であるFFT（高速フーリエ変換）を使った。図7は、FFTにより、(15), (16)式のパワースペクトルの数値的に求めた結果である。$y(t)$の

パワースペクトル$I_y(\omega)$には、$\omega_0=0.000$, $\omega_1=1.002$, $\omega_2=0.797$に、$p_y(t)$のパワースペクトル$I_{p_y}(\omega)$には、$\omega_0'=1.002$, $\omega_1'=0.799$に振動数ピークがみられる。これらの振動数は、図３の自己相関関数の数値計算結果にみられる振動の振動数に対応するものである。また振動数ピーク付近の関数形は、自己相関関数の減衰定数と関連しており重要である。

４．１　パワースペクトルのピーク構造

図７(a), (b)のパワースペクトルの振動数ピーク付近の関数形を詳細に調べた。

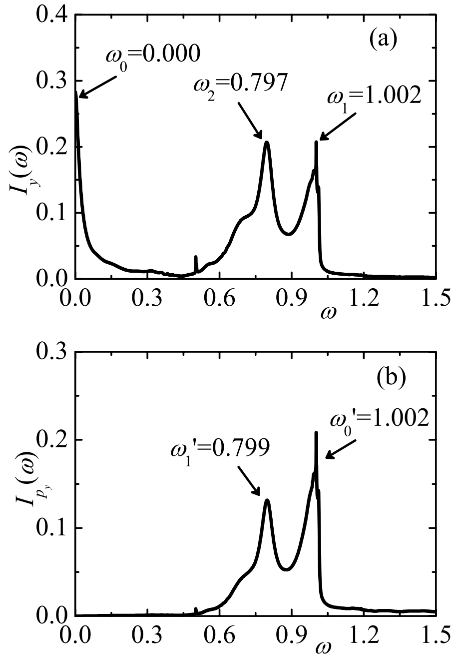

図７：$E=1/6$における⒂, ⒃式の数値計算から得られたパワースペクトル($\Delta t=2\pi/64$, $N'=2^{16}$, $N=10^8$)

４．１．１　yのパワースペクトル$I_y(\omega)$のピーク構造

図７(a)におけるyのパワースペクトル$I_y(\omega)$における最も高いピークから３番目までの$\omega=\omega_0$, ω_1, ω_2ピーク付近の関係形を調べた。図８は、$\omega=\omega_0$におけるピーク値の半値幅までのデータと最小２乗法により求めた⒄式のローレンチアン（Lorenzian）の近似式との比較である。

$$I_y(\omega)=\frac{1}{\pi}\frac{a_0\gamma_0}{\omega^2+\gamma_0^2}+b_0. \tag{17}$$

図８においては、$a_0=0.01163$, $\gamma_0=0.01657$, $b_0=0.05926$である。図８において、パワースペクトル$I_y(\omega)$の$\omega=\omega_0$付近のピーク構造は、⒄のローレンチアンと非常によく一致している(決定係数$R^2=0.9999$)。

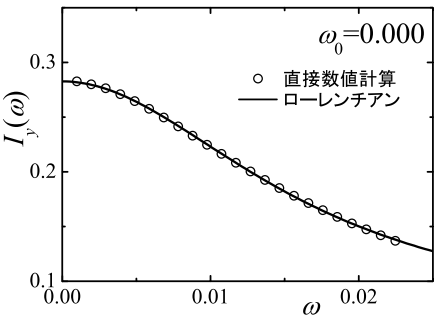

図８：$E=1/6$におけるyのパワースペクトル$I_y(\omega)$の$\omega=\omega_0=0.000$付近の直接数値計算結果($\Delta t=2\pi/64$, $N'=2^{16}$, $N=10^8$)と⒄式のローレンチアンとの比較

ウィーナー・ヒンチンの定理により、このローレンチアンは、次式の自己相関関数と等価である。

$$C_{yy}(t)=a_0\exp(-\gamma_0 t). \tag{18}$$

従って、$\omega=\omega_0$付近のパワースペクトル$I_y(\omega)$

のピーク構造は、自己相関関数では指数関数減衰に対応していることがわかった。またその減衰定数は $\gamma_0=0.01657$であり、相関時間 τ_0は $\tau_0=1/\gamma_0\simeq60.35$と見積もることができる。

図９は、$\omega=\omega_1$におけるピーク値の半値幅までのデータと最小２乗法により求めた⒆式の非対称ローレンチアンの近似式との比較である。

$$I_y(\omega)=\frac{a_1}{2\pi}\frac{(\omega-\hat{\omega}_1)\sin\theta_1+\gamma_1\cos\theta_1}{(\omega-\hat{\omega}_1)^2+\gamma_1^2}+\frac{a_1}{2\pi}\frac{(\omega+\hat{\omega}_1)\sin(-\theta_1)+\gamma_1\cos(-\theta_1)}{(\omega+\hat{\omega}_1)^2+\gamma_1^2}+b_1. \tag{19}$$

図９においては、$a_1=0.06516$, $\gamma_1=0.02764$, $\hat{\omega}_1=1.0267$, $\theta_1=-1.6462$, $b_1=-0.01269$である。図９のパワースペクトルの$\omega=\omega_1$付近のピーク構造は、非対称ローレンチアンとよく一致している（決定係数$R^2=0.8697$)。ただし、$\omega=\omega_1$の近くの数点のデータに非対称ローレンチアンとのズレがみられる。$\omega=1.000$は、ちょうどHénon-Heiles系に非線形項がない場合の固有振動数に対応するので、特別なことが起きている可能性がある。$\omega=\omega_1$付近では、$\omega=1.000$の線スペクトルと非対称ローレンチアンの重ね合わせになっている可能性がある。アンサンブル数Nの不足によりズレがみえている可能性も考えられる。この点は今後の課題である。

ウィーナー・ヒンチンの定理により、この非対称ローレンチアンは、次式の自己相関関数と等価である。

$$C_{yy}(t)=a_1\exp(-\gamma_1 t)\cos(\hat{\omega}_1+\theta_1). \tag{20}$$

従って、$\omega=\omega_1$付近のパワースペクトル$I_y(\omega)$のピーク構造は、自己相関関数では振動型の指数関数減衰に対応していることがわかった。またその減衰定数 γ_1は $\gamma_1=0.02764$であり、相関時間 τ_1は $\tau_1=1/\gamma_1\simeq36.18$と見積もることができる。

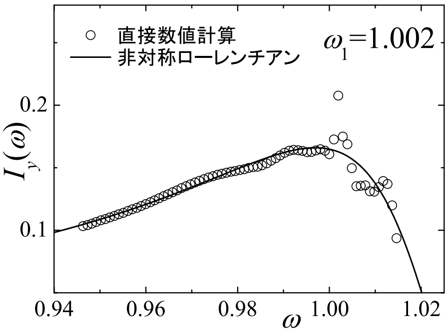

図９：$E=1/6$におけるyのパワースペクトル$I_y(\omega)$の$\omega=\omega_1=1.002$付近の直接数値計算結果($\Delta t=2\pi/64$, $N'=2^{16}$, $N=10^8$)と⒆式の非対称ローレンチアンとの比較

図10は、$\omega=\omega_2=0.797$におけるピーク値の半値幅までのデータと最小２乗法により求めた㉑式の非対称ローレンチアンとの比較である。

$$I_y(\omega)=\frac{a_2}{2\pi}\frac{(\omega-\hat{\omega}_2)\sin\theta_2+\gamma_1\cos\theta_2}{(\omega-\hat{\omega}_2)^2+\gamma_2^2}+\frac{a_2}{2\pi}\frac{(\omega+\hat{\omega}_2)\sin(-\theta_2)+\gamma_2\cos(-\theta_2)}{(\omega+\hat{\omega}_2)^2+\gamma_2^2}+b_2. \tag{21}$$

図10においては、$a_2=0.02656$, $\gamma_2=0.02844$, $\hat{\omega}_2=0.80005$, $\theta_2=-0.22908$, $b_2=0.06016$である。図10のパワースペクトルの$\omega=\omega_2$付近のピーク構造は、非対称ローレンチアンと非常によく一致している（決定係数$R^2=0.99965$)。

ウィーナー・ヒンチンの定理により、この非対称ローレンチアンは、次式の自己相関関数と等価である。

$$C_{yy}(t)=a_2\exp(-\gamma_2 t)\cos(\hat{\omega}_2+\theta_2). \tag{22}$$

従って、$\omega=\omega_2$付近のパワースペクトル$I_y(\omega)$のピーク構造は、自己相関関数では振動型の指数関数減衰に対応していることがわかった。またその減衰定数γ_2は$\gamma_2=0.02844$であり、相関時間τ_2は$\tau_2=1/\gamma_2\simeq 35.16$と見積もることができる。

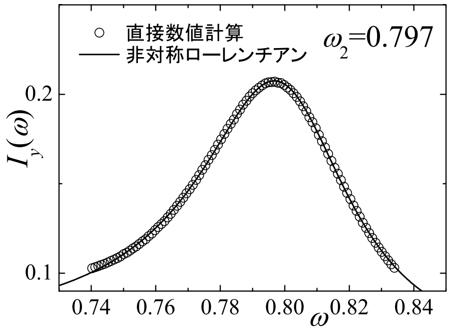

図10：$E=1/6$におけるyのパワースペクトル$I_y(\omega)$の$\omega=\omega_2=0797$付近の直接数値計算結果($\Delta t=2\pi/64$, $N'=2^{16}$, $N=10^8$)と㉑式のローレンチアンとの比較

4．1．2　p_yのパワースペクトル$I_{p_y}(\omega)$のピーク構造

図７(b)のp_yのパワースペクトル$I_{p_y}(\omega)$における最も高いピークから２番目までの$\omega=\omega_0'$, ω_1'のピーク付近の関係形を調べた。

図11は、$\omega=\omega_0'=1.002$におけるピーク値の半値幅までのデータと最小２乗法により求めた㉓式の非対称ローレンチアンの近似式との比較である。

$$I_{p_y}(\omega)=\frac{a_0'}{2\pi}\frac{(\omega-\hat{\omega}_0')\sin\theta_0'+\gamma_0'\cos\theta_0'}{(\omega-\hat{\omega}_0')^2+\gamma_0'^2}+\frac{a_0'}{2\pi}\frac{(\omega+\hat{\omega}_0')\sin(-\theta_0')+\gamma_0'\cos(-\theta_0')}{(\omega+\hat{\omega}_0')^2+\gamma_0'^2}+b_0'. \tag{23}$$

図11においては、$a_0'=0.03064$, $\gamma_0'=0.02524$, $\hat{\omega}_0'=1.0152$, $\theta_0'=-1.17747$, $b_0'=0.03019$である。

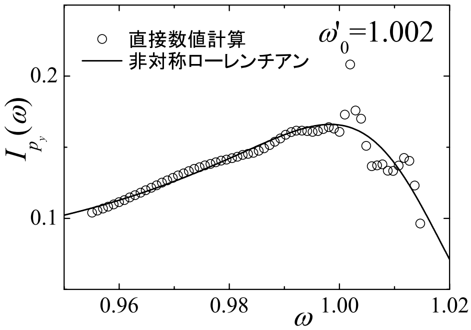

図11：$E=1/6$におけるp_y式のパワースペクトル$I_{p_y}(\omega)$の$\omega=\omega_0'=1.002$付近の直接数値計算結果($\Delta t=2\pi/64$, $N'=2^{16}$, $N=10^8$)と㉓式の非対称ローレンチアンとの比較

図11のパワースペクトルの$\omega=\omega_0'$付近のピーク構造は、非対称ローレンチアンとよく一致している（決定係数$R^2=0.84382$）。ただし、$\omega=\omega_0'$の近くの数点のデータに非対称ローレンチアンとのズレがみられる。$\omega=1.000$は、ちょうどHénon-Heiles系に非線形項がない場合の固有振動数に対応するので、特別なことが起きている可能性がある。$\omega=\omega_0'$付近では、$\omega=1.000$の線スペクトルと非対称ローレンチアンの重ね合わせになっている可能性がある。アンサンブル数Nの不足によりズレがみえている可能性も考えられる。この点は今後の課題である。

ウィーナー・ヒンチンの定理により、この非対称ローレンチアンは、次式の自己相関関数と等価である。

$$C_{p_yp_y}(t)=a_0'\exp(-\gamma_0't)\cos(\hat{\omega}_0'+\theta_0'). \tag{24}$$

従って、$\omega=\omega_0'$付近のパワースペクトル$I_{p_y}(\omega)$のピーク構造は、自己相関関数では振動型の指数関数減衰に対応していることがわかった。またその減衰定数γ_0'は$\gamma_0'=0.02524$であり、相関

時間τ'_0は$\tau'_0=1/\gamma'_0\simeq 39.62$と見積もることができる。

図12は、$\omega=\omega'_1=0.799$におけるピーク値の半値幅までのデータと最小2乗法により求めた(25)式の非対称ローレンチアンの近似式との比較である。

$$I_{p_y}(\omega)=\frac{a'_1}{2\pi}\frac{(\omega-\hat{\omega}'_1)\sin\theta'_1+\gamma'_1\cos\theta'_1}{(\omega-\hat{\omega}'_1)^2+\gamma'^2_1} +\frac{a'_2}{2\pi}\frac{(\omega+\hat{\omega}'_1)\sin(-\theta'_1)+\gamma'_1\cos(-\theta'_1)}{(\omega+\hat{\omega}'_1)^2+\gamma'^2_1} +b'_1. \tag{25}$$

図12においては、$a'_1=0.01824$, $\gamma'_1=0.02955$, $\hat{\omega}'_1=0.79863$, $\theta'_1=-0.04571$, $b'_1=0.03341$である。図12のパワースペクトルの$\omega=\omega'_1$付近のピーク構造は、非対称ローレンチアンと非常によく一致している（決定係数$R^2=0.99996$）。

ウィーナー・ヒンチンの定理により、この非対称ローレンチアンは、次式の自己相関関数と等価である。

$$C_{p_yp_y}(t)=a'_1\exp(-\gamma'_1 t)\cos(\hat{\omega}'_1+\theta'_1). \tag{26}$$

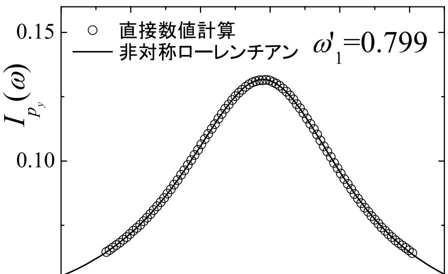

図12：$E=1/6$におけるp_yのパワースペクトル$I_{p_y}(\omega)$の$\omega=\omega'_1=0.799$付近の直接数値計算結果（$\Delta t=2\pi/64$, $N'=2^{16}$, $N=10^8$）と(25)式の非対称ローレンチアンとの比較

従って、$\omega=\omega'_1$付近のパワースペクトル$I_{p_y}(\omega)$のピーク構造は、自己相関関数では振動型の指数関数減衰に対応していることがわかった。またその減衰定数γ'_1は$\gamma'_1=0.02955$であり、相関時間τ'_1は$\tau'_1=1/\gamma'_1\simeq 33.84$と見積もることができる。

5　まとめと課題

本稿では、Hénon-Heiles系のカオス軌道の統計的性質について調べた。前稿[7]では、Hénon-Heiles系[8]におけるカオス軌道の統計的性質として自己相関関数やパワースペクトルについて考察した。前稿[7]で調べた変数は4変数のうちyの1変数みであった。またパワースペクトルのピーク付近の構造については解析していなかった。本稿では、非線形性が最も強いパラメータ$E=1/6$に着目し、その他の3つの変数x, p_x, p_yを含めた4変数のカオス軌道の統計的性質を調べ、変数間の相互相関について調べた。また、パワースペクトルのピーク付近の構造を詳細に調べた。

$E=1/6$における4つの力学変数x, y, p_x, p_yについて自己相関関数を数値的に求めた（図3）。その結果、4つの力学変数x, y, p_x, p_yのすべての自己相関関数が振動しながら0に減衰することがわかった。また、xとy、p_xとp_yの自己相関関数が一致することがわかった（図4）。yとp_yとの相互相関関数を調べた結果、2変数間の時間遅れが$\Delta\tau=1.6689\cdots$となることがわかった（図5）。この時間遅れ$\Delta\tau$は、ポアンカレ断面Σ^xへの回帰時間分布の最頻値$t_{max}=6.67588\cdots$と関係していることがわかった（図6）。

yとp_yの自己相関関数にあらわれる周期性を調べるために、パワースペクトル$I_y(\omega)$, I_{p_y}

(ω)をFFTにより求めた（図７）。その結果、$y(t)$のパワースペクトル$I_y(\omega)$には、$\omega_0=0.000$, $\omega_1=1.002$, $\omega_2=0.797$に、$p_y(t)$のパワースペクトル$I_{p_y}(\omega)$には、$\omega_0'=1.002$, $\omega_1'=0.799$に振動数ピークがみられた。

パワースペクトル$I_y(\omega)$の$\omega=\omega_0$付近のピーク構造は、⒄式のローレンチアンの近似式と非常によく一致した（図８）。このローレンチアンは、自己相関関数では指数関数減衰に対応している（減衰定数$\gamma_0=0.01657$、相関時間$\tau_0=1/\gamma_0\simeq60.35$)。パワースペクトル$I_y(\omega)$の$\omega=\omega_1$付近のピーク構造は、⒆式の非対称ローレンチアンの近似式とよく一致した（図９）。この非対称ローレンチアンは、自己相関関数では振動型の指数関数減衰に対応している（減衰定数$\gamma_1=0.02764$、相関時間$\tau_1=1/\gamma_1\simeq36.18$)。パワースペクトル$I_y(\omega)$の$\omega=\omega_2$付近のピーク構造は、㉑式の非対称ローレンチアンの近似式と非常によく一致した（図10)。この非対称ローレンチアンは、自己相関関数では振動型の指数関数減衰に対応している（減衰定数$\gamma_2=0.02844$、相関時間$\tau_2=1/\gamma_2\simeq35.16$)。

パワースペクトル$I_{p_y}(\omega)$の$\omega=\omega_0'$付近のピーク構造は、㉓式の非対称ローレンチアンの近似式とよく一致した（図11)。この非対称ローレンチアンは、自己相関関数では振動型の指数関数減衰に対応している（減衰定数$\gamma_0'=0.02524$、相関時間$\tau_0'=1/\gamma_0'\simeq39.62$)。パワースペクトル$I_{p_y}(\omega)$の$\omega=\omega_1'$付近のピーク構造は、㉕式の非対称ローレンチアンの近似式と非常によく一致した（図12)。この非対称ローレンチアンは、自己相関関数では振動型の指数関数減衰に対応している（減衰定数$\gamma_1'=0.02955$、相関時間$\tau_1'=1/\gamma_1'\simeq33.84$)。

図９、図11のパワースペクトル$I_y(\omega)$における$\omega=\omega_1$, $I_{p_y}(\omega)$における$\omega=\omega_0'$の近くの数点のデータに非対称ローレンチアンとのズレがみられた。$\omega=1.000$は、ちょうどHénon-Heiles系に非線形項がない場合の固有振動数に対応するので、特別なことが起きている可能性がある。$I_y(\omega)$における$\omega=\omega_1$, $I_{p_y}(\omega)$における$\omega=\omega_0'$付近では、$\omega=1.000$の線スペクトルと非対称ローレンチアンの重ね合わせになっている可能性がある。アンサンブル数Nの不足によりズレがみえている可能性も考えられる。この点は今後の課題である。

yとp_yの自己相関関数の減衰形は、一見するとよく似ている（図４）。しかし、パワースペクトル$I_y(\omega)$と$I_{p_y}(\omega)$には大きな違いがあることがわかった（図７）。$I_y(\omega)$には、$\omega=\omega_0=0.000$付近にローレンチアンの近似式とよく合うピークがみられるのに対して、$I_{p_y}(\omega)$には、このピークがみられない。このような違いは、何が原因となっているのだろうか。また、$\omega=1.000$の固有振動数以外に、$I_y(\omega)$には$\omega_2=0.797$、$I_{p_y}(\omega)$には$\omega_1'=0.799$に非対称ローレンチアンの近似式とよく合うピークがみられる。これらの振動数ピークは何によって作り出されているのだろうか。この点も今後の課題である。

最近、射影演算子法を援用して、カオス解をもつ決定論的な微分方程式を非マルコフな線形確率微分方程式に変換し、記憶関数を数値的に求め、自己相関関数やパワースペクトルを分析する研究が行われている[12), 13), 14), 15)]。森、岡村らは、カオス運動には、決定論的で可逆な初期レジームと確率的で不可逆な終期レジームの相反する性質が共存していると指摘し、蔵本-Sivashinsky（KS）方程式における状態変数の自己相関関数が、初期レジームでは可逆な

代数型減衰、終期レジームでは不可逆な指数型減衰からなること、パワースペクトルにおけるピーク構造は、ピーク付近が不可逆な指数型減衰を示すローレンチアンとピークの裾野が可逆な代数型減衰を示す指数型ウィングからなることを示した[15]。本稿では、Hénon-Heiles 系のカオスのパワースペクトルのピークがローレンチアンもしくは非対称ローレンチアンとなることを示したが、これはカオスの確率的で不可逆な終期レジームの性質をあらわしている。Hénon-Heiles 系のカオスに、初期レジームでの可逆な代数型減衰があるのかどうかは、パワースペクトルのピークの裾野が指数型ウィングをなしているかどうかを調べることによりわかるのではないかと考えられる。この点も今後の課題である。

付録：Hénon-Heiles系と戸田格子

質量が等しい3個の粒子が円周上にあり、指数関数型の相互作用をしている力学系として次式のハミルトニアンと考える。

$$
\begin{aligned}
H_t=&\frac{1}{2}(p_1^2+p_2^2+p_3^2)+\exp[-(q_1-q_3)]\\
&+\exp[-(q_2-q_1)]\\
&+\exp[-(q_3-q_2)]-3.
\end{aligned}
\tag{27}
$$

上式においてq_1, q_2, q_3は円周上での3つの粒子の位置を表す角度変数、p_1, p_2, p_3は3つの角度変数に対する運動量に対応する。これは3個の粒子からなる戸田格子である。

ここで、$(q, p)\rightarrow(Q, P)$への正準変換(canonical transformation)を考える。

そこで、次の関数 $W_1(\{q_i\}, \{P_i\})$

$$
W_1=P_1q_1+P_2q_2+(P_3-P_1-P_2)q_3, \tag{28}
$$

を母関数とすると、(q, p)と(Q, P)との間の関係は、

$$
Q_1=\frac{\partial W_1}{\partial P_1}=q_1-q_3, \tag{29}
$$

$$
Q_2=\frac{\partial W_1}{\partial P_2}=q_2-q_3, \tag{30}
$$

$$
Q_3=\frac{\partial W_1}{\partial P_3}=q_3, \tag{31}
$$

$$
p_1=\frac{\partial W_1}{\partial q_1}=P_1, \tag{32}
$$

$$
p_2=\frac{\partial W_1}{\partial q_2}=P_2, \tag{33}
$$

$$
p_3=\frac{\partial W_1}{\partial q_3}=P_3-P_1-P_2, \tag{34}
$$

となる。従って、母関数$W_1(\{q_i\}, \{P_i\})$を使った正準変換により得られる新たなハミルトニアンは

$$
\begin{aligned}
H_t'=&\frac{1}{2}[p_1^2+p_2^2+(P_3-P_1-P_2)^2]\\
&+\exp(-Q_1)+\exp[-(Q_2-Q_1)]\\
&++\exp(Q_2)-3,
\end{aligned}
\tag{35}
$$

となる。

この系は、エネルギーに加え、全角運動量$\sum_{i=1}^{3}p_i$が保存される性質をもつ。そこで定数である$P_3(=p_1+p_2+p_3)$を0とおくと、ハミルトニアンH_t'は

$$
\begin{aligned}
H_t'=&\frac{1}{2}[p_1^2+p_2^2+(P_1-P_2)^2]+\exp(-Q_1)\\
&+\exp[-(Q_2-Q_1)]+\exp(Q_2)-3,
\end{aligned}
\tag{36}
$$

となる。

次に、$(Q, P)\rightarrow(q', p')$への正準変換を考える。

そこで、次の関数 $W_2(\{Q_i\}, \{p_i'\})$

$$W_2=\frac{1}{4\sqrt{3}}[(p'_x-\sqrt{3}p'_y)\,Q_1 + (p'_x+\sqrt{3}p'_y)\,Q_2], \tag{37}$$

を母関数とすると、(Q, P)と(q', p')との間の関係は、

$$P_1=\frac{\partial W_2}{\partial Q_1}=\frac{1}{4\sqrt{3}}(p'_x-\sqrt{3}p'_y), \tag{38}$$

$$P_2=\frac{\partial W_2}{\partial Q_2}=\frac{1}{4\sqrt{3}}(p'_x-\sqrt{3}p'_y), \tag{39}$$

$$q'_1=\frac{\partial W_2}{\partial p'_1}=\frac{1}{4\sqrt{3}}(Q_1+Q_2), \tag{40}$$

$$q'_2=\frac{\partial W_2}{\partial p'_2}=\frac{1}{4\sqrt{3}}(Q_2-Q_1), \tag{41}$$

となる。従って、母関数$W_2(\{Q_i\}, \{p'_i\})$を使った正準変換により得られる新たなハミルトニアンは、

$$\begin{aligned} H''_t=&\frac{1}{16}(p'^2_x+p'^2_y)+\exp(2q'_2+2\sqrt{3}q'_1)\\ &+\exp(2q'_2-2\sqrt{3}q'_1)\\ &+\exp(-4q'_2)-3, \end{aligned} \tag{42}$$

となる。

ここで

$$\begin{aligned} &P'_x=8\sqrt{3}p_x,\ q'_1=x,\ p'_y=8\sqrt{3}p_y,\\ &q'_2=y,\ \mathcal{H}=H''_t/24, \end{aligned} \tag{43}$$

という変数変換を行うと

$$\begin{aligned} \mathcal{H}=&\frac{1}{2}(p_x^2+p_y^2)+\frac{1}{24}[\exp(2y+2\sqrt{3}x)\\ &+\exp(2y-2\sqrt{3}x)+\exp(-4y)]-\frac{1}{8}, \end{aligned} \tag{44}$$

となり、２次元のポテンシャル中を動く粒子のハミルトニアン$\mathcal{H}$が得られた。

このハミルトニアン$\mathcal{H}$をxとyについて$x=0$, $y=0$で３次の項までテイラー展開を行うと、Hénon-Heiles系のハミルトニアンHが得られる[1), 2)]。

参考文献

１）大貫義郎・吉田春夫: 力学(岩波講座 現代の物理学), 岩波書店(1997).

２）A. J. Lichitenberg and M. A. Lieberman: *Regular and Chaotic Dynamics*, Springer-Verlag, New York, (1992).

H. G. Schuster: *Deterministic Chaos*, VCH, Weinheim (1995).

E. Ott: *Chaos in Dynamical Systems*, Cambridge University Press (2002).

３）森肇・蔵本由紀: 散逸構造とカオス（岩波講座 現代の物理学), 岩波書店 (1997).

４）井上政義・秦浩起: カオス科学の基礎と展開－複雑系の理解に向けて、共立出版 (1999).

井上政義: やさしくわかるカオスと複雑系の科学, 日本実業出版社 (1996).

５）R. Ishizaki, T. Horita, T. Kobayashi and H. Mori: Anomalous Diffusion Due to Accelerator Modes in the Standard Map, Prog. Theor. Phys., Vol. 85, No. 5, pp. 1013-1022 (1991).

R. Ishizaki, T. Horita and H. Mori: Anomalous Diffusion and Mixing of Chaotic Orbits in Hamiltonian Dynamical Systems, Prog. Theor. Phys., Vol. 89, No. 5, pp. 947-963 (1993).

６）R. Ishizaki, S. Kuroki, H. Tominaga, N. Mori and H. Mori: Time Correlations and Diffusion of a Conservative Forced Pendulum, Prog. Theor. Phys., Vol. 109, No. 2, pp. 169-186 (2003).

７）石崎龍二: Hénon-Heiles系におけるカオ

ス軌道の統計的性質、福岡県立大学人間社会学部紀要、Vol. 16、No. 2、pp.15-27（2008）.
8）M. Hénon and C. Heiles: The applicability of the third integral of motion: some numerical experiments, Astron. J., Vol. 69, pp. 73-79（1964）.
9）M. Toda: Waves in Nonlinear Lattice, Prog. Theor. Phys. Suppl., No. 45, pp. 174-200（1970）.
10）日野幹雄: スペクトル解析, 朝倉書店(1977)。
11）R. Kubo, M. Toda and N. Hashitsume: *Statistical Physics II – Nonequilibrium Statistical Mechanics,* 2nd ed., Springer-Verlag, p. 17（1991）.
12）H. Mori, S. Kuroki, H. Tominaga, R. Ishizaki and N. Mori: Randomization and Memory Functions of Chaos and Turbulence, Prog. Theor. Phys., Vol. 109, No. 3, pp. 333-355（2003）.
13）H. Tominaga, S. Kuroki and H. Mori: Time Correlations and Power Spectra of the Duffing Equation, Prog. Theor. Phys., Vol. 109, No. 4, pp. 575-589（2003）.
14）R. Ishizaki, H. Mori, H. Tominaga, S. Kuroki and N. Mori: The Memory Function and Chaos-Induced Friction in the Chaotic Hénon-Heiles System, Prog. Theor. Phys., Vol. 116, No. 6, pp. 1051-1067（2006）.
15）H. Mori and M. Okamura: Dynamic structures of the time correlation functions of chaotic nonequilibrium fluctuations, Phys. Rev. E 76, 061104(9 pages)（2007）.